L'ÉLECTRON MAGNÉTIQUE

(THÉORIE DE DIRAC)

PAR

LOUIS DE BROGLIE
MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A LA SORBONNE
LAUREAT DU PRIX NOBEL

PARIS
HERMANN ET C^IE, ÉDITEURS
6, RUE DE LA SORBONNE, 6
—
1934

perfection qu'est l'existence des états d'énergie négative. Diverses tentatives ont été faites néanmoins pour tâcher de tourner la difficulté : nous en dirons seulement quelques mots.

M. Schrödinger a proposé une modification très ingénieuse des équations générales de Dirac qui ferait disparaître les états d'énergie négative (1). Mais outre que cette modification paraît difficilement compatible avec l'existence de la diffusion de la lumière par les électrons, elle a un caractère assez nettement artificiel.

M. Dirac, au lieu de vouloir supprimer les états d'énergie négative, a au contraire cherché à les interpréter (2). Il a pour cela supposé que ces états existent réellement et que dans toute partie de l'espace se trouverait un nombre infini d'électrons occupant tous ces états d'énergie négative, électrons qui seraient inobservables. Quelques-uns de ces électrons quitteraient de temps à autre leur état habituel d'énergie négative pour prendre un état d'énergie positive et ceux-là seraient les électrons observables. Le « trou » laissé dans les états à énergie négative par le départ d'un électron serait ce que nous appelons un proton. Le retour de l'électron évadé dans un état d'énergie négative constituerait la disparition simultanée d'un électron et d'un proton, disparition qui doit s'accompagner d'une émission de radiation. Malheureusement ces séduisantes hypothèses se sont heurtées à toutes sortes d'objections et ne semblent pas pouvoir être conservées (1).

En résumé, les états d'énergie négative de l'électron jouent un rôle très important dans la structure même de la théorie de Dirac et cependant ils ne se manifestent pas dans la réalité. Il semble que, pour l'instant, on ne puisse que constater la difficulté sans la résoudre.

---

(1) Voir notamment *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, t. II, p. 269.

(2) *Ibidem*, t. I, p. 357.

(3) La théorie des trous de Dirac connaît en ce moment un retour de faveur par suite de la découverte expérimentale de l'électron positif.

CHAPITRE XXI

Le tremblement de Schrödinger

1. *Le mouvement du centre de gravité de la probabilité.*

NOUS éviterons dans ce chapitre d'introduire explicitement un opérateur correspondant à la « vitesse » de l'électron. La vitesse d'un corpuscule est une notion dont on doit user prudemment dans la nouvelle Mécanique comme l'a remarqué M. Bohr. Elle n'est bien bien définie que dans certains cas et il ne paraît pas justifié de la considérer comme une grandeur physique observable.

Au contraire, il est toujours permis d'envisager la position moyenne du corpuscule ou centre de gravité de la probabilité et d'étudier son mouvement. Ce point est en effet défini en théorie de Dirac par ses coordonnées :

$$\bar{x} = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_1^4{}_k \Psi_k^* \Psi_k \, d\tau \; ; \quad \bar{y} = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} y \sum_1^4{}_k \Psi_k^* \Psi_k \, d\tau \; ;$$

$$\bar{z} = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z \sum_1^4{}_k \Psi_k^* \Psi_k \, d\tau \, . \qquad (1)$$

La vitesse du point de coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ est, elle, une quantité parfaitement déterminée.

Soit $(\Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \Psi_4)$ la solution de l'équation de Dirac qui représente l'onde associée au mouvement d'un certain électron. Nous pouvons, nous le savons, développer chaque Ψ_k en série de fonctions propres sous la forme :

$$\Psi_k = \sum_n c_n \Psi_{k,n} \tag{2}$$

les c_n étant des constantes complexes. En substituant dans (1), on a :

$$\bar{x} = \sum_{m,n} c_m{}^* c_n \int_D \sum_1^4{}_k (\Psi^*_{k,m}\, x\, \Psi_{k,n})\, d\tau \tag{3}$$

en remplaçant par un seul signe de sommation les intégrales triples des formules (1). En désignant par x_{mn} l'élément d'indices m, n de la matrice correspondant à l'opérateur x, la formule (3) s'écrit simplement :

$$\bar{x} = \sum_{m,n} c_m{}^* c_n x_{mn} \tag{4}$$

Or, en vertu de la formule (25) du chapitre XV, on a :

$$\frac{d x_{mn}}{d t} = \int_D \sum_1^4{}_k \left[\Psi^*_{k,m} \frac{2\pi i}{h} (x\,\mathrm{H} - \mathrm{H}\,x)\, \Psi_{k,n}\right] d\tau \tag{5}$$

où H est l'opérateur Hamiltonien de Dirac :

$$\mathrm{H} = -\left[e\,\mathrm{V} + c\,(\alpha_1 \mathrm{P}_1 + \alpha_2 \mathrm{P}_2 + \alpha_3 \mathrm{P}_3 + \alpha_4 m_0 c)\right] \tag{6}$$

On trouve aisément :

$$\frac{2\pi i}{h}\left(x\,\mathrm{H} - \mathrm{H}\,x\right) = c\,\alpha_1 \left(x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot x\right) = -c\,\alpha_1 \tag{7}$$

et par suite :

$$\frac{d x_{mn}}{d t} = \int_D \sum_1^4{}_k \left[\Psi^*_{k,m} (-c\,\alpha_1)\, \Psi_{k,n}\right] d\tau \tag{8}$$

De (4), on obtient donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt} &= \sum_{m,n} c_m{}^* c_n \frac{d x_{mn}}{d t} \\ &= \int_D \sum_1^4{}_k \left[\sum_m c_m{}^* \Psi^*_{k,m} (-c\,\alpha_1) \sum_n c_n \Psi_{k,n}\right] d\tau \\ &= \int_D \sum_1^4{}_k \Psi_k{}^* (-c\,\alpha_1)\, \Psi_k\, d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

On trouverait naturellement de même :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \int_D \sum_1^4{}_k \Psi_k{}^* (-c\alpha_2)\, \Psi_k d\tau; \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \int_D \sum_1^4{}_k \Psi_k{}^* (-c\alpha_3) \Psi_k \cdot d\tau. \tag{10}$$

Nous avons trouvé précédemment (formules [7] du chap. XII) les expressions suivantes pour les composantes du courant de probabilité :

$$\rho\, u_x = -c \sum_1^4{}_k \Psi_k{}^* \alpha_1 \Psi_k\, d\tau. \tag{11}$$

On a donc, par comparaison avec (9) :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \int_D \rho\, u_x\, d\tau = \bar{u}_x \tag{12}$$

et de même :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{u}_y \qquad \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{u}_z. \tag{12'}$$

La vitesse du centre de gravité de la probabilité est donc égale à la valeur moyenne de la vitesse de la probabilité, résultat qu'on aurait pu prévoir *a priori*.

On interprète souvent les formules (9) et (10) en disant que les opérateurs $-c\alpha_1$, $-c\alpha_2$ et $-c\alpha_3$ sont les opérateurs correspondant aux trois composantes de la vitesse de l'électron. Comme ces opérateurs n'ont pour valeurs propres que $+c$ et $-c$, on est amené à dire d'après les principes généraux de la nouvelle Mécanique que les seules valeurs possibles des composantes de la vitesse sont $+c$ et $-c$, résultat assez difficile à comprendre. Nous préférons, comme nous l'avons dit, nous abstenir de faire correspondre des opérateurs à la « vitesse » d'un corpuscule.

2. *Le théorème d'Ehrenfest n'est plus exact en théorie de Dirac.* — En Mécanique ondulatoire non relativiste, nous avons démontré le théorème d'Ehrenfest qui s'exprime par les formules :

$$m\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \overline{f_x}\,; \quad m\frac{d^2\overline{y}}{dt^2} = \overline{f_y}\,; \quad m\frac{d^2\overline{z}}{dt^2} = \overline{f_z}\,. \tag{13}$$

Appliqué au cas de l'absence de champ, ce théorème nous conduit au résultat suivant : « En l'absence de champ, le mouvement du centre de gravité de la probabilité est rectiligne et uniforme. » Ceci est en quelque sorte la transposition en Mécanique ondulatoire du principe de l'inertie.

En théorie de Dirac, les résultats précédents ne sont plus exacts en général. En effet, partons de la formule (8) et appliquons encore la formule (25) du chapitre XV; nous obtenons :

$$\frac{d^2x_{m,n}}{dt^2} = \int_D \sum_1^4{}_k \left[\Psi_{k,m}{}^* \cdot \frac{2\pi i}{h}(-c\,\alpha_1 \mathrm{H} + \mathrm{H}\,c\,\alpha_1) \cdot \Psi_{k,n}\right] \cdot d\tau \tag{14}$$

et par suite d'après (4) :

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \sum_{m.n} c_m^* c_n \int_D \sum_1^4{}_k \left[\Psi^*_{k,m} \frac{2\pi i}{h}(-c\alpha_1 \mathrm{H} + \mathrm{H}c\alpha_1)\,\Psi_{k,n}\right] \cdot d\tau. \tag{15}$$

Or α_1 ne commute pas avec H puisqu'il anticommute avec α_2, α_3 et α_4. On a donc en général

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} \neq 0\,, \text{ et de même : } \frac{d^2\overline{y}}{dt^2} \neq 0\,; \quad \frac{d^2\overline{z}}{dt^2} \neq 0\,. \tag{16}$$

Le mouvement du centre de gravité de la probabilité en l'absence de champ n'est pas en général rectiligne et uniforme.

Nous allons maintenant examiner de près la raison qui empêche ce mouvement du centre de gravité d'être rectiligne et uniforme et nous allons voir qu'elle est reliée à l'existence des états d'énergie négative. Nous obtiendrons ainsi sous une forme différente des résultats obtenus par M. Schrödinger [1].

3. *Le tremblement de Schrödinger.* — Pour bien comprendre pourquoi le centre de gravité de la probabilité n'a pas en général, même en l'absence de champ, un mouvement rectiligne et uniforme dans la Mécanique de Dirac, nous allons soumettre à une analyse détaillée l'expression :

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \int_D \sum_1^4{}_k \Psi_k{}^*(-c\,\alpha_1)\,\Psi_k\,d\tau. \tag{17}$$

Nous savons que l'on peut toujours écrire :

$$\Psi_k(x, y, z, t) = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[a_k(p_x\,p_y\,p_z)\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}[\mathrm{W}t - p_x x - p_y y - p_z z]} \tag{18}$$
$$+ b_k(p_x\,p_y\,p_z)\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}[\mathrm{W}t - p_x x - p_y y - p_z z]}\Big]\,dp_x\,dp_y\,dp_z$$

avec :

$$\mathrm{W} = +\sqrt{m_0{}^2 c^2 + p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2}\,. \tag{19}$$

Les huit $a_k(p_x p_y p_z)$ et $b_k(p_x p_y p_z)$ peuvent se calculer à partir de 4 d'entre eux qui sont arbitraires par des formules que nous connaissons.

Appelons maintenant « espace des moments » l'espace constitué en prenant comme coordonnées rectangulaires les grandeurs $p_x p_y p_z$ et divisons cet espace en cellules σ aussi petites que nous voulons. Les quantités :

$$\Delta(\sigma) = \int\int\int \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)}\,dp_x\,dp_y\,dp_z \tag{20}$$

sont (à une constante de normalisation près) les « différen-

(1) *Annales de l'Institut H. Poincaré, loc. cit.*

tielles propres » du spectre continu des ondes monochromatiques planes (¹) et nous pouvons écrire :

$$\Psi_k(x, y, z, t) = \sum_\sigma \Big[a_k(p_x\, p_y\, p_z)\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h} \mathrm{W} t} + b_k(p_x\, p_y\, p_z)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W} t} \Big] \Delta(\sigma) \quad (21)$$

$p_x\, p_y\, p_z$ étant les coordonnées du centre de l'élément σ dans l'espace des moments et $\sum\limits_\sigma$ désignant la sommation sur toutes les cellules σ de cet espace.

Ceci étant, nous pouvons écrire (17) sous la forme :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -c \sum_\sigma \sum_{\sigma'} \sum_1^4{}_k \Big[a_k(p'_x\, p'_y\, p'_z)\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W} t} + b_k(p'_x\, p'_y\, p'_z)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W} t} \Big]^* \alpha_1 \Big[a_k(p_x\, p_y\, p_z)\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W} t} + b_k(p_x\, p_y\, p_z)\, \mathrm{e}^{\frac{-2\pi i}{h}\mathrm{W} t} \Big] \cdot \int_D \Delta^*(\sigma')\, \Delta(\sigma)\, d\tau \quad (22)$$

le domaine étant naturellement ici l'espace tout entier. Les différentielles propres étant orthogonales et pouvant être supposées normées, nous avons (²) :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -c \sum_\sigma \sigma \sum_1^4{}_k \Big[a_k(p_x\, p_y\, p_z)\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W} t} + b_k(p_x\, p_y\, p_z)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W} t} \Big]^* \cdot \alpha_1 \cdot \Big[a_k(p_x\, p_y\, p_z)\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W} t} + b_k(p_x\, p_y\, p_z)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\mathrm{W} t} \Big] \quad (23)$$

ou encore :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -c \sum_\sigma \sigma \sum_1^4{}_k [a_k^*\, \alpha_1\, a_k + b_k^*\, \alpha_1\, b_k] - c \sum_\sigma \sigma \Big(\sum_1^4{}_k a_k^*\, \alpha_1\, b_k\, \mathrm{e}^{-\frac{4\pi i}{h}\mathrm{W} t} + \sum_1^4{}_k b_k^*\, \alpha_1\, a_k\, \mathrm{e}^{\frac{4\pi i}{h}\mathrm{W} t} \Big) \quad (24)$$

(¹) Voir la définition des différentielles propres au chapitre V, paragr. 4.
(²) Nous désignons ici par σ le volume de la cellule σ.

Il s'agit maintenant de transformer cette expression. Nous avons d'après les formules du chapitre précédent :

$$a_1 = -\frac{p_z \mathrm{A} + (p_x - i\, p_y)\, \mathrm{B}}{\frac{\mathrm{W}}{c} + m_0 c}\ ; \quad a_2 = -\frac{(p_x - i\, p_y)\, \mathrm{A} - p_z \mathrm{B}}{\frac{\mathrm{W}}{c} + m_0 c}\ ;$$

$$a_3 = \mathrm{A}\ ;\quad a_4 = \mathrm{B} \quad (25)$$

d'où :

$$-c \sum_1^4{}_k a_k^*\, \alpha_1\, a_k = -c\, (a_1^*\, a_4 + a_2^*\, a_3 + a_3^*\, a_2 + a_4^*\, a_1) = 2\, p_x\, c^2 \frac{\mathrm{AA}^* + \mathrm{BB}^*}{\mathrm{W} + m_0 c^2} \quad (26)$$

Mais on a aussi :

$$\sum_1^4{}_k a_k^*\, a_k = (\mathrm{AA}^* + \mathrm{BB}^*) \left(1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\left(\frac{\mathrm{W}}{c} + m_0 c\right)^2} \right) = 2\, \mathrm{W} \frac{\mathrm{AA}^* + \mathrm{BB}^*}{\mathrm{W} + m_0 c^2}. \quad (27)$$

d'où par comparaison avec (26) :

$$-c \sum_1^4{}_k a_k^*\, \alpha_1\, a_k = \frac{p_x c^2}{\mathrm{W}} \sum_1^4{}_k a_k^*\, a_k. \quad (28)$$

On trouverait de même en utilisant l'expression des b_k :

$$-c \sum_1^4{}_k b_k^*\, \alpha_1\, b_k = -\frac{p_x c^2}{\mathrm{W}} \sum_1^4{}_k b_k^*\, b_k \quad (29)$$

D'autre part, les deux derniers termes de l'expression (24) sont complexes conjugués (à cause de l'hermiticité de α_1) et peuvent s'écrire :

$$c \sum_\sigma \sigma\, \mathrm{A}_1 \cos\left(\frac{4\pi}{h} \mathrm{W} t + \varphi_1\right) \quad (30)$$

A_1 et φ_1 variant naturellement d'une cellule σ à une autre, c'est-à-dire étant fonctions de $p_x\, p_y\, p_z$.

Finalement par (28), (29) et (30), nous pouvons écrire (24) sous la forme :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sum_\sigma \sigma \frac{c^2 p_x}{W}\left(\sum_1^4{}_k a_k^* a_k - \sum_1^4{}_k b_k^* b_k\right) + \sum_\sigma \sigma\, c\, A_1 \cos\left(\frac{4\pi W}{h} t + \varphi_1\right) \quad (31)$$

Or, d'après les formules de la Dynamique relativiste, la quantité $\frac{c^2 p_x}{W}$ est la composante x de la vitesse correspondant à la quantité de mouvement p_x et à l'énergie $+W$. De même, on peut considérer $-\frac{c^2 p_x}{W}$ comme la composante x de vitesse correspondant à la quantité de mouvement et à l'énergie négative $-W$. Le premier terme dans l'expression (31) de $\frac{d\bar{x}}{dt}$ est donc une sorte de valeur moyenne de la composante de vitesse v_x correspondant à la composition spectrale (18) de l'onde Ψ. Posons donc :

$$\bar{v}_x = \sum_\sigma \sigma \frac{p_x c^2}{W} \sum_1^4{}_k (a_k^* a_k - b_k^* b_k) \quad (32)$$

$\bar{v}_x$ est naturellement indépendante du temps. Nous avons donc :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}_x + \sum_\sigma \sigma\, c\, A_1 \cos\left(\frac{4\pi}{h} Wt + \varphi_1\right) \quad (33)$$

d'où par intégration :

$$\bar{x} = C^{te} + \bar{v}_x t + \sum_\sigma \sigma \frac{hc\, A_1}{4\pi W} \sin\left(\frac{4\pi}{h} Wt + \varphi_1\right) \quad (34)$$

Posons :

$$\xi = C^{te} + \bar{v}_x t \quad (35)$$

Il vient :

$$\bar{x} = \xi + \sum_\sigma \sigma \frac{hc\, A_1}{4\pi W} \sin\left[2\pi \cdot \frac{2W}{h} \cdot t + \varphi_1\right] \quad (36)$$

On trouverait de même :

$$\bar{y} = \eta + \sum_\sigma \sigma \frac{hc\, A_2}{4\pi W} \sin\left[2\pi \cdot \frac{2W}{h} t + \varphi_2\right];$$
$$\bar{z} = \zeta + \sum_\sigma \sigma \frac{hc\, A_3}{4\pi W} \sin\left[2\pi \cdot \frac{2W}{h} t + \varphi_3\right]. \quad (37)$$

avec les définitions :

$$\eta = \bar{v}_y t + C^{te} \quad ; \quad \bar{v}_y = \sum_\sigma \sigma \frac{p_y c^2}{W} \cdot \sum_1^4{}_k (a_k^* a_k - b_k^* b_k)$$
$$\zeta = \bar{v}_z t + C^{te} \quad ; \quad \bar{v}_z = \sum_\sigma \sigma \frac{p_z c^2}{W} \cdot \sum_1^4{}_k (a_k^* a_k - b_k^* b_k) \quad (38)$$

Le point de coordonnées ξ, η, ζ se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme, mais le centre de gravité de la probabilité exécute autour de ce point une série d'oscillations de fréquences $\frac{2W}{h}$. C'est le « tremblement de Schrödinger ». Les amplitudes de ces oscillations sont d'ailleurs en général faibles car elles sont proportionnelles au facteur $\frac{hc}{4\pi W}$ qui est toujours plus petit que $\frac{hc}{4\pi m_0 c^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{h}{m_0 c}$; or la quantité $\frac{h}{m_0 c}$ souvent appelée « longueur d'onde de Compton » est très petite ($2{,}4 \cdot 10^{-10}$ cm.).

L'analyse précédente montre très nettement l'origine du tremblement de Schrödinger. Il est dû au *battement* des ondes à énergie positive W avec les ondes à énergies négatives $-W$ correspondantes. La fréquence du battement est comme à l'ordinaire la différence de fréquence des ondes battantes, soit ici $\frac{2W}{h}$.

Pour un train d'ondes dans la décomposition spectrale duquel ne figure aucune onde à énergie négative, il n'y a pas de tremblement de Schrödinger et le théorème d'Ehrenfest est valable. Mais nous savons que dans le cas général, pour représenter un train d'ondes, il faut faire appel aux ondes d'énergie négative. Voilà pourquoi le théorème n'est pas en général valable dans la théorie de Dirac.

Le tremblement de Schrödinger et la non-validité du théorème d'Ehrenfest sont donc liés à l'existence des états d'énergie négative et disparaîtraient avec eux si on pouvait les éliminer.