

# Feldmechanik des Elektrons und der Elementarteilchen.

Von

H. HÖNL.

Mit 17 Abbildungen.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorbemerkung . . . . .	291
I. Teil. Die Frage nach der Existenz eines Elektronenmodells . . . . .	292
1. Der Ansatz der Lorentz'schen Elektromagnettheorie . . . . .	293
2. Der Spin des Elektrons und das Modell der umlaufenden Ladung . . . . .	293
3. Die Schrodinger'sche Zitterbewegung des Elektrons als Folge der Diracschen Theorie . . . . .	298
II. Teil. Mechanik des Elektronenmodells . . . . .	301
4. Das Pol-Dipol-Teilchen und seine Deutung . . . . .	306
5. Relativistisch strenge Theorie des Pol-Dipol-Teilchens . . . . .	306
a) Methode . . . . .	309
b) Bewegungsgleichungen und Erhaltungssatze . . . . .	309
c) Verallgemeinerungen . . . . .	310
6. Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Mechanik des Elektronenmodells . . . . .	314
a) Lagrange'sche Funktion und Bewegungsgleichungen in kanonischer Form . . . . .	315
b) Das Elektron im elektromagnetischen Feld . . . . .	315
c) Das Pol-Dipol-Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	319
d) Erweiterung durch Einführung der Strukturfunktion $F(Q)$ . . . . .	321
7. Die Maxwell'sche Elektrodynamik und Feldmechanik des Elektronenmodells . . . . .	324
8. Die Minkowski'sche Elektrodynamik . . . . .	326
9. Die Theorie von Born und Infeld . . . . .	327
10. Die Theorie von Bopp und der Übergang zur Feldmechanik . . . . .	330
a) Der Ansatz für die Lagrange-Dichte des Feldes . . . . .	333
b) Der Übergang zur Feldmechanik . . . . .	336
c) Der Bopp'sche Ansatz für die elektromagnetischen Potentiale . . . . .	336
d) Das Eigenfeld einer Punktladung und die Lagrange-Funktion der Feldmechanik . . . . .	340
11. Die Bopp-Feynman'sche Theorie und ihr Zusammenhang mit der Strahlungsabsorption . . . . .	342
a) Das Fokker'sche Variationsprinzip der Elektrodynamik und die Strahlungsabsorption . . . . .	345
b) Modifikation des Variationsprinzips durch Feynman . . . . .	348
c) Klassisch-korrespondenzmäßige Beschreibung der Paarerzeugung und Paarvernichtung . . . . .	350
12. Ein ausgeführtes Beispiel zur Feldmechanik . . . . .	354
a) Beispiel von E. Grosschmitt . . . . .	357
b) Korrespondenzmäßige Überlegungen zum Massenspektrum . . . . .	361

IV. Teil. Der Übergang zu den Wellengleichungen für das Elektron und die Elementarteilchen . . . . .	365
13. Allgemeine Überlegungen. Massenspektrum. Röntgenabsorptionsprozesse . . . . .	365
14. Der Übergang zur Wellengleichung und zu den Vertauschungsrelationen . . . . .	368
a) Das Schema des Übergangs . . . . .	368
b) Die nicht-ausreduzierte allgemeine feldmechanische Wellengleichung und die zugehörigen Vertauschungsrelationen . . . . .	370
15. Ausreduzierte Wellengleichungen für Elementarteilchen mit beliebigem Spinwerten . . . . .	373
a) Darstellungstheorie und die Brogliesche Fusionsmethode . . . . .	373
b) Spezielle Wellengleichungen der Fusionsstufen $N = 1, 2$ und $3$ . . . . .	376
Schlussbemerkung . . . . .	380
Literaturverzeichnis . . . . .	380

### Vorbemerkung.

Die Ausführungen dieses Berichts basieren durchgehend auf dem Bohrschen Korrespondenzprinzip. Sie setzen die Anwendbarkeit dieses tiefliegenden Prinzips auch im Gebiet des eigentlich „Elementaren“, bei der Struktur des Elektrons und der Elementarteilchen, voraus, und es scheint, daß es seine große heuristische Kraft auch hier bewährt. Wenn dieser Gesichtspunkt bei den bisherigen Darstellungen nicht oder nur wenig zur Geltung kam, so liegt das zweifellos an der großen Vollkommenheit der Diracschen Theorie des Elektrons, welche, ohne von irgendwelchen modellmäßigen Vorstellungen Gebrauch zu machen, fast alle Eigenschaften des Elektrons (und Positrons) in vorzüglicher Übereinstimmung mit der Erfahrung bis in feinste Einzelheiten hinein zu beschreiben gestattet. Die Diracsche Theorie stellt gewissermaßen einen Vorgriff dar, demgegenüber hier ein Rückgriff unternommen wird. Es zeigt sich, daß der Spin des Elektrons (und ebenso der anderen Elementarteilchen) ebenso wenig modellfremd ist wie es etwa irgendwelche Züge der Atomspektren sind. Von hier aus führt, wie BORN gezeigt hat, ein neuer Weg zur Begründung der Diracschen Wellengleichung und darüber hinaus zu teils bekannten (PROCA, KEMMER), teils bisher unbekannten Wellengleichungen für Elementarteilchen.

Die folgenden Ausführungen stellen ferner insofern einen in sich geschlossenen Gedankenkreis dar, als das Thema der LORENTZschen Elektromagnettheorie (soweit sie die Struktur des Elektrons betrifft) neu aufgegriffen und soweit fortgeführt wird, daß der Ursprung des Spinphänomens deutlich wird. Die speziellen Ausführungen zu diesem Thema sind nach Vorarbeiten von ALTE sowie von BORN und INFELD vor allem in Untersuchungen von BORN und FEYNMAN zur „Feldmechanik“ enthalten, d. h. es wird nach den dynamischen Bewegungsgesetzen gefragt, denen die als Feldsingulartäten vorgestellten Elementarteilchen unterliegen, und es zeigt sich, daß hierbei in der LAGRANGE-Funktion des Teilchens beschleunigungsabhängige Zusatzterme auftreten, welchen neue Freiheitsgrade des Systems, die Freiheitsgrade des Spins, zuzuordnen sind. Es ist ferner ein charakteristischer Zug der über MAXWELL hinausgehenden erweiterten elektrodynamischen Theorien, daß in ihnen — anders als in der bisherigen Quantentheorie der

Wellenfelder — die bekannten Schwierigkeiten einer unendlichen Selbstenergie von Punktladungen umgangen werden können. Auf die Quantenelektrodynamik und die mit ihr zusammenhängenden Fragen, sowohl der Lamb-shift (SCHWINGER, TOMONAGA) als auch des ungelösten Problems der Selbstenergie, wird in diesem Bericht nicht eingegangen. Man darf wohl der Überzeugung sein, daß sich die Schwierigkeiten in der heutigen Quantentheorie der Wellenfelder (insbesondere des elektromagnetischen Feldes) um so eher werden beseitigen lassen, je vollständiger die Möglichkeiten der klassischen Theorie überblickt werden können. Aus diesem Grunde scheint uns die Beschränkung auf die Erweiterungen der klassischen Theorie gerechtfertigt. Es mag andererseits eingewandt werden, daß die Elektrodynamik allein keine genügend breite Grundlage für eine auch nur klassisch verstandene Theorie der Elementarteilchen, sondern vielleicht nur für das Elektron, das Positron und einige Arten von Mesonen, abgeben kann. Dieser Einwand mag gerechtfertigt sein; und hiermit hängt es wohl auch vor allem zusammen, daß sich auf der Grundlage des speziell elektrodynamischen Modells der Feldmechanik bisher kein befriedigendes Verständnis für das Massenspektrum und die Abhängigkeiten der Elementarteilchen untereinander (ihre „Familienengeschichte“) erzielen ließ. Trotzdem ergeben sich schon bei der Erweiterung der MAXWELLSCHEN Elektrodynamik so wesentliche neue Gesichtspunkte, daß diese gewiß auch in einer künftigen vollkommeneren Theorie der Elementarteilchen Anwendung finden werden. Die Darstellung der (elektrodynamischen) Feldmechanik macht den Hauptteil dieses Berichtes aus. Die beiden vorangehenden Teile haben mehr vorbereitenden Charakter. Wenn hierbei die Mechanik des „Pol-Dipol-Teilchens“, die sich als eine direkte Erweiterung der Mechanik des relativistischen Massenpunktes darstellen läßt, einen verhältnismäßig breiten Raum einnimmt, so möge man dem Verfasser die Vorliebe für dieses einfachste Modell eines Teilchens mit Spin nicht verargen. Im letzten Teil wird der Übergang von der Feldmechanik zu allgemeinen Wellengleichungen vom DIRACSCHEN Typus nach dem Vorgange von BORN und F. L. BAUER vollzogen. Vielleicht wird hierbei der letzte Sinn aller Modelle deutlich: am Ende überflüssig geworden zu sein. Es möge noch erwähnt werden, daß der vorliegende Bericht eine Umarbeitung von Vorlesungen darstellt, die der Verfasser im Oktober 1950 an der Universität Kapstadt (Südafrika) gehalten hat. Dieser Umstand mag auf Darstellungsart und Stoffauswahl von einigem Einfluß gewesen sein<sup>1)</sup>.

## I. Teil.

### Die Frage nach der Existenz eines Elektronenmodells. 1. Der Ansatz der Lorentzschen Elektromechanik.

Gibt es ein Modell des Elektrons? Die Frage nach dem Elektronenmodell ist so alt wie die Elektromechanik selbst. Es war HENDRIK <sup>1)</sup> Es ist mir ein aufrichtiges Bedürfnis, Herrn F. BORN, mit dem ich durch jahre einen ausführenden Briefwechsel über die Probleme der Feldmechanik geführt habe, der für mich sehr wesentlich zur Klärung des ganzen Fragenkomplexes beigetragen hat, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.



dem kinematischen Verhalten des Modells der umlaufenden Ladung und den entsprechenden Erwartungswerten für das Dirac-Elektron herausgestellt. Nun war der ursprüngliche Sinn des Korrespondenzprinzips, soweit es

sich um die Quantenmechanik handelt, gerade eine möglichstste Übereinstimmung zwischen Erwartungswerten von Operatoren und modellmäßigen Größen herbeizuführen („Korrespondenz I. Art“). In diesem Sinne genügt also das Modell der umlaufenden Ladung den Forderungen des Korrespondenzprinzips. Dieses Modell entbehrt jedoch

andererseits zunächst noch jeder tieferdringenderen dynamischen Begründung. Wir werden diese in den folgenden Abschnitten beizubringen haben. Dabei wird es sich vor allem um ein tieferes Verständnis des Elektronenspins handeln müssen, dessen Mechanik und Kinematik im Rahmen der Diracschen Theorie durch die Beziehungen (3, 13) bis (3, 15a) zum Ausdruck gelangt.

## II. Teil

### Mechanik des Elektronenmodells.

Wir haben bereits in Abschnitt 2 gesehen, daß das LORENTZsche Elektronenmodell der Ladungskugel nicht geeignet sein kann, den Elektronenspin verstättlich zu machen. Man wird vielmehr die ausgedehnte ruhende oder rotierende Ladungskugel durch die Umlaufbewegung des Ladungsortes zu ersetzen haben (19). Im 3. Abschnitt ergab sich, daß die Berechnung der Erwartungswerte für die Elektronenkoordinaten nach der DIRACschen Theorie zu einem analogen Ergebnis führt. Bei beiden Betrachtungsweisen ist das Wesentliche die Entkopplung von Geschwindigkeit und Impuls, derart, daß jetzt nicht mehr die vom gewöhnlichen relativistischen Massenpunkt her geläufige Relation  $\mathfrak{p} = \mu v$  Gültigkeit hat (15, 16, 19, 20). Es entsteht die Frage, wie eine derartige Entkopplung von Geschwindigkeit und Impuls dynamisch begründet werden kann. Bevor wir diese Frage systematisch erörtern, wollen wir uns zunächst an einem einfachen mechanischen Modell die wesentlichen Zusammenhänge klar zu machen versuchen.

### 4. Das Pol-Dipol-Teilchen und seine Deutung.

Wir denken uns ein einfaches mechanisches System, das aus zwei in starre Verbindung gebrachte Massen  $m^+$  und  $m^-$  verschiedenen Vorzeichen besteht; der Abstand der Massen sei  $s$ . Es sei ferner  $m^+ > |m^-|$

so jedoch, daß die Differenz  $m^+ - |m^-| \ll m^+$  sei. Das System kann als Überlagerung eines Massendipols mit dem Moment

$$p = m^+ s \approx |m^-| s \quad (4, 1a)$$

und eines Massenspols gleich der Massendifferenz

$$m = m^+ - |m^-| \quad (4, 1b)$$

angesehen werden („Pol-Dipol-Teilchen“). Wir untersuchen die Bewegung dieses Massensystems (20).

Die freie Bewegung des Systems muß wie bei jedem Zweimassensystem eine Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden

Komponenten sein. Das Besondere des vorliegenden Falles besteht darin, daß der Schwerpunkt  $S$  wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Komponenten *außerhalb* der direkten Verbindungslinie der Massen liegt, und zwar in der Verlängerung derselben auf der Seite der (absolut genommen) größeren Masse  $m^+$  (s. Abb. 4). Der Radius des beschriebenen Kreises sei  $R$  (= Abstand  $m^+, S$ ) und es sei ferner  $s \ll R$ .

Der Schwerpunktssatz fordert jetzt:

$$m^+ R = |m^-| (R + s) \quad (4, 2)$$

und das Impulsmoment wird nach (4, 1a),

$$J = \{m^+ R^2 - |m^-| (R + s)^2\} \omega$$

$$= m^+ R (R - R - s) \omega = -m^+ s R \omega \quad (4, 3)$$

$$= -p \omega$$

( $\omega$  Winkelgeschwindigkeit,  $v$  lineare Geschwindigkeit). Wir bemerken noch, daß das Dipolmoment  $p$  von der Peripherie nach dem Zentrum  $S$  der Bahn gerichtet ist. Daher läßt sich vektoriell schreiben:

$$J = [p, v]. \quad (4, 4)$$

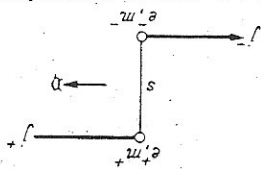
Dieses Ergebnis läßt sich sehr einfach dahin aussprechen, daß wir sagen: der Translation eines Massendipols entspricht ein Impulsmoment genau

ebenso, wie nach der gewöhnlichen Elektrodynamik zu der Translation eines elektrischen Dipols ein magnetisches Moment gehört (s. Abb. 5).

Unser Beispiel besitzt also alle charak-

teristischen Merkmale des vorgeschlagenen Modells für das Diracsche Spinelektron. Das System führt eine *Mikrobewegung* (Kreisbewegung) aus, während gleichzeitig der Schwerpunkt des Systems in Ruhe bleibt. Der Gesamtwimpuls  $\mathfrak{P}$  ist also null. Denken wir uns der Bewegung eine Translation überlagert, so wird  $\mathfrak{P} = \text{const} \neq 0$ , während der Teilchenort eine

Abb. 5. Analogie zwischen magnetischem Moment und Impulsmoment eines Dipols (elektrischer bzw. Massen-Dipol), hervorgerufen durch Translation v.



Art Schraubenbewegung ausführt. Mikrogeschwindigkeit und Impuls sind also in dem obigen Sinne entkoppelt.

Das Beispiel des Pol-Dipol-Teilchens ist weitgehend konstruiert, da es auf der Fiktion negativer Massen beruht. Der fiktive Charakter dieser Annahme könnte freilich dadurch abgeschwächt erscheinen, als nach der DIRACschen Wellengleichung ebenfalls negative Massen bzw. Energien auftreten, so daß auch darin ein tieferer Zusammenhang vermutet werden könnte. Doch ebenso, wie in der DIRACschen Theorie die negativen Energien (durch Anwendung des PAULI-Prinzips in der Theorie des Positrons) wieder eliminiert werden können, müssen auch wir bestrebt sein, bei unserem mechanischen Beispiel negative Massen auszuscheiden (s. unten).

Das eigentliche klassische Modell des Elektrons wird elektrodynamisch Charakter tragen müssen. Man wird erwarten dürfen, daß dieses Modell aus einer Erweiterung der Ansätze von LORENTZ hervorgehen wird (wovon weiterhin die Rede sein soll). Unsere bisherigen Betrachtungen zeigen bereits, daß hierbei eine wesentliche Abänderung der Züge des LORENTZschen Modells des Elektrons notwendig sein wird. Diese Abänderungen bestehen in folgendem:

a) Der Ladungsort (bzw. sein Zentrum) soll mit dem Schwerpunkt des Elektrons *nicht zusammenfallen*. Da ein mit einer ruhenden Ladung verbundenes Feld nicht rotieren kann, so kann der Spin des Elektrons nur dadurch zustande kommen, daß die Ladung  $-e$  (mit anhängendem Feld) um den Schwerpunkt des Systems umläuft; die Rotation ist also durch eine Umlaufbewegung zu ersetzen.

b) Die (wahre) Ladungsverteilung soll als in Strenge *punktförmig* angenommen werden, da sich nur auf diese Weise die *Unelbarkeit* des Elektrons als „Elementarteilchen“ symbolisieren läßt).

Dies beiden Züge des Modells erfordern eine wesentliche Abänderung der gewöhnlichen MAXWELTschen Elektrodynamik. Es ist aber, wie schon hier erwähnt werden soll, sehr befriedigend, daß sich die genannten Züge des Modells als natürliche Folgen der über MAXWELL und LORENTZ hinausgehenden Entwicklung der Elektrodynamik erweisen lassen.

Das rein mechanische Pol-Dipol-Teilchen ist dem elektrodynamischen Modell natürlich nicht genau gleichwertig, sondern muß als ein Ersatzmodell für dieses angesehen werden. Es läßt aber, wie sich gezeigt hat, alle kinematischen und mechanischen Eigentümlichkeiten des letzteren bereits vollständig hervorreten. Aus diesem Grunde ist es nützlich, die Mechanik des Pol-Dipol-Teilchens auch unabhängig von dem aufschlußreicheren feldmechanischen Modell zu entwickeln, wie es im folgenden

<sup>1)</sup> Dies kommt entsprechend auch bei der quantentheoretischen Formulierung des Problems zum Ausdruck, wobei die in einem beliebigen Volumen  $v$  enthaltene Gesamtladung  $\int \rho d v$  (d. Ladungsdichte) als eine Matrix erscheint, deren Eigenwerte ganzzahlige Vielfache einer Elementarladung  $\pm e$  sind. Klassisch interpretiert ist diese Aussage mit der Ausdehnungslosigkeit der in einzelnen Punkten konzentrierten Ladungen identisch [siehe z. B. JORDAN (27)].



gesehenen soll<sup>1)</sup>). Da die Mikrobewegung, wie durch die Analogie mit der SCHRODINGERSchen Zitterbewegung nahegelegt wird, hierbei (nahezu oder genau) die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann, so wird es nötig sein, die Mechanik des Pol-Dipol-Teilchens in relativistischer Vollständigkeit darzustellen.

## 5. Relativistisch strenge Theorie des Pol-Dipol-Teilchens.

### a) Methode.

Es soll sich weiterhin darum handeln, eine relativistisch strenge Theorie des Pol-Dipol-Teilchens zu entwickeln und vor allem die Bewegungsgleichungen für dieses System aufzustellen. Hierbei wird es natürlich zweckmäßig sein, die dem Relativitätspostulat der speziellen Relativitätstheorie angepaßte MINKOWSKISCHE Bezeichnungsweise zu benutzen (22). Wir bezeichnen demgemäß Raum-Zeitpunkte durch Vierervektoren mit den Komponenten

$$(5, 1) \quad x_z = (x_1, x_2, x_3, ict).$$

Die Weltlinie eines Teilchens sei durch  $z_z(s)$  dargestellt, wobei wir unter  $s$  die „Eigenzeit“ verstehen (die eine mit dem Teilchen mitgeführte Normaluhr anzeigen würde), deren Differential durch

$$(5, 2) \quad ds = \sqrt{dt^2 - \frac{dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2} dt$$

gegeben wird. Führen wir in MINKOWSKISCHER Weise den Vierervektor der Geschwindigkeit

$$(5, 3) \quad u_z = \frac{dz_z}{ds} = z_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( \frac{dz_1}{dt}, \frac{dz_2}{dt}, \frac{dz_3}{dt}, ic \right)$$

ein, so ist nach (5, 2)

$$(5, 4) \quad u_z u_z = -c^2$$

und hieraus folgt weiter durch Differentiation nach  $s$ :

$$(5, 4a) \quad u_z \dot{u}_z = 0, \quad u_z \dot{u}_z + \dot{u}_z u_z = 0, \quad u_z \dot{u}_z + 3 \dot{u}_z u_z = 0, \dots$$

Wir heben noch das häufig gebrauchte Geschwindigkeitsmaß

$$(5, 5) \quad u_0 = \frac{c}{|u_z|} = \frac{c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

hervor.

<sup>1)</sup> Das Vorzeichen des Spins ist nach (4, 3) und (4, 4) umgekehrt, als bei dem Umlaufstrom (im Sinne der gewöhnlichen Mechanik) zu erwarten wäre. Hieraus könnte geschlossen werden, daß der magnetische  $g$ -Faktor des Modells, das sich das magnetische Moment nach dem Umlaufstrom richtet, ein negatives Vorzeichen besitzt. Man vergleiche hierzu jedoch die Fußnote auf S. 326.  
<sup>2)</sup> Über gleiche griechische Indizes soll stets von 1 bis 4 summiert werden; statt  $u_z u_z$  soll auch  $u_\mu u_\mu$  geschrieben werden. Auf die Hervorkehrung der kontravarianten Komponenten soll hierbei verzichtet werden.