A. Sommerfeld.

ZUM 70. GEBURTSTAGE

GEWIDMET VON

SCHÜLERN UND FREUNDEN

5. Dezember 1938

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 33 • HEFT 7 • DEZEMBER 1938

Über ein Kreiselmodell des Elektrons und seine Anwendung auf die Zerstrahlungswahrscheinlichkeit von Elektron–Positron-Paaren

Von H. Hönl

(Mit 3 Abbildungen)

§ 1. Charakterisierung des Elektronenmodells. Problemstellung

Die Diracsche Theorie des Elektrons und Positrons[1]), welche das Spinphänomen als Ausfluß des Relativitätspostulats erscheinen läßt, entspricht den Anforderungen der heutigen Atomphysik in so vollkommener Weise, daß es überflüssig erscheinen könnte, nach einem *Modell* des Elektrons zu fragen. In der Tat beschreibt diese Theorie nicht nur alle Einzelheiten der Feinstrukturen der optischen und Röntgenspektren mit bewunderungswürdiger Genauigkeit, sondern sie gibt auch Rechenschaft über die Vorgänge der Umwandlung energiereicher Lichtquanten in Elektron–Positron-Paare (Anderson), sowie über den umgekehrten (noch hypothetischen) Vorgang der Vernichtung derartiger Paare unter gleichzeitiger Aussendung energiereicher γ-Quanten. Trotz dieser Erfolge einer in sich geschlossenen Theorie scheint die Forderung eines den Bedürfnissen der Anschauungen entsprechenden Modells des Elektrons und Positrons nicht unberechtigt. Es mag in diesem Zusammenhang daran erinnert werden, daß ein derartiges Modell nicht nur allgemein durch das Korrespondenzprinzip nahegelegt wird, sondern daß für die Entwicklung der Diracschen Theorie gerade die Aufstellung eines vorgängigen Modells in Gestalt der Uhlenbeck-Goudsmitschen *Hypothese des Kreiselelektrons* von größter heuristischer Bedeutung gewesen ist.

Gemäß der Uhlenbeck-Goudsmitschen Hypothese[2]) hat man dem Elektron bekanntlich ein Impulsmoment von der Größe $^1/_2\, \hbar$ (Spin) und ein entgegengesetzt gerichtetes magnetisches Moment von der Größe eines ganzen Bohrschen Magnetons ($e\, \hbar / 2\, m\, c$) zuzuschreiben.

---

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. **117**. S. 610. 1928; **118**. S. 351. 1928.

2) G. E. Uhlenbeck u. S. Goudsmit, Naturwiss. **13**. S. 953. 1925.

Diese Hypothese wird durch die Erfahrung unmittelbar bestätigt (anomale Zeemaneffekte, magneto-mechanische Effekte).

Im Gegensatz hierzu hat bei den Diskussionen über die Erfahrungen an Elektronen die Frage nach der *Größe des Elektrons* eine verhältnismäßig geringfügige Rolle gespielt — offensichtlich deswegen, weil die Erscheinungen keine unmittelbaren Schlüsse auf die Größe eines „Elektronenradius" zuzulassen schienen. Definiert man den Elektronenradius r etwa in der Weise, daß man die Größe πr^2 als den Streuquerschnitt des Elektrons gegen hinreichend langwelliges Licht ansieht, so ist einleuchtend, daß der „Elektronenradius" dann weniger einen modellmäßigen Zug des Elektrons als vielmehr die Unbestimmtheit charakterisiert, mit Hilfe des Lichts den genauen Ort des Elektrons festzustellen. Der auf diese Weise definierte Elektronenradius [1])

$$r = \sqrt{\frac{8}{3}}\,\frac{e^2}{m c^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,r_0$$

ist nun von derselben Größenordnung wie die Lineardimension einer zentralsymmetrischen Ladungsverteilung, deren elektrostatische Energie der Ruhenergie des Elektrons $m c^2$ gleichgesetzt wird. Es ist daher allgemein üblich geworden, die Länge

$$r_0 = \frac{e^2}{m c^2} \tag{1}$$

als „Elektronenradius" zu bezeichnen [2]). Es ist jedoch schon von Uhlenbeck und Goudsmit (a. a. O.) darauf aufmerksam gemacht worden, daß die Vorstellung einer rotierenden Ladungsverteilung mit dem Radius (1), welche durch ihre Rotation ein magnetisches Moment von der Größenordnung eines Bohrschen Magnetons erzeugt, als Modell des Elektrons widerspruchsvoll ist, da die Äquatorgeschwindigkeit des Elektrons dann die Lichtgeschwindigkeit etwa um einen Faktor 10^2 übertreffen müßte.

Ein Elektronenmodell mit einem Radius von der Größenordnung (1) besitzt jedoch, worauf zuerst Born und Schrödinger hingewiesen haben [3]), noch den weiteren Mangel, daß sich die magnetische Energie etwa um einen Faktor 10^4 größer ergibt als die elektrostatische Energie der Elektronenladung. Es scheint daher naheliegend, anzunehmen, daß die Masse des Elektrons zu einem überwiegenden Teil von seiner magnetischen und nur zu einem geringen Teil von seiner elektrostatischen Energie herrührt. Setzt man daher die Ruhenergie $m c^2$ des Elektrons der magnetischen Energie größenordnungsmäßig gleich, so wird man zu einer Neudimensionierung des Elektrons geführt. Aber der von Born und Schrödinger unternommene Versuch, den Elektronenradius auf diese Weise zu berechnen ($r \simeq 13{,}6\, r_0$) muß ebenfalls daran scheitern, daß die Äquatorgeschwindigkeit des Elektrons die Lichtgeschwindigkeit noch immer erheblich übertrifft (etwa um das 5—10fache).

1) M. Born, Naturwiss. **20**. S. 269. 1932.

2) Es soll im Rahmen dieser Untersuchung nicht darauf eingegangen werden, welche physikalische Bedeutung der Länge r_0 unabhängig von einem Modell des Elektrons zukommt. Vgl. hierzu W. Heisenberg, Ann. d. Phys. [5] **32**. S. 20. 1938.

3) M. Born u. E. Schrödinger, Nature (Lond.) **135**. S. 342. 1935.

Die innern Widersprüche bei den bisherigen Dimensionierungen des Elektronenmodells sind von so grober Art, daß, wenn überhaupt von einem Elektronenmodell mit definiertem Radius sinnvoll gesprochen werden kann, diese Versuche kaum befriedigen können. Es ist daher vom Verf. vor kurzem eine Dimensionierung des Elektronenmodells vorgeschlagen worden [1]) welche die den bisherigen Modellen anhaftenden Schwierigkeiten zu vermeiden versucht. Wir wollen dieses Modell (im Gegensatz zu einem weiter unten zu besprechenden) als Modell I kennzeichnen. Es möge folgendermaßen charakterisiert werden:

Modell I: Das Elektron (und ebenso Positron) wird als eine rotierende, den Raum kontinuierlich erfüllende Ladungsverteilung aufgefaßt. Die zugrunde gelegte Hypothese besteht darin, daß die Äquatorgeschwindigkeit des Elektrons gerade gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist.

Hieraus, sowie aus der Tatsache, daß das Elektron ein Spinmoment von der Größe $^1/_2$ besitzt, ergibt sich dann, daß der Elektronradius in der Größenordnung von

$$a_0 = \frac{\hbar}{m c} \tag{2}$$

angenommen werden muß. Das Verhältnis der nach (1) bzw. (2) berechneten „Elektronenradien" ist die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{r_0}{a_0}. \tag{3}$$

Der nach (2) berechnete Elektronenradius a_0 ist also um den Faktor $\frac{1}{\alpha} = 137$ mal größer als die Länge r_0 und kommt damit in die Größenordnung der Compton-Wellenlänge $\lambda_0 = 2\pi a_0$. Es zeigt sich nunmehr, daß die Rotationsenergie des Elektrons gerade die Größenordnung der Eigenenergie $m c^2$ besitzt, falls man diese auf

1) H. Hönl, Naturwiss. **26**. S. 408. 1938.

mechanische, nicht elektromagnetische Weise berechnet. Denn da für die Kreisfrequenz der Rotation größenordnungsmäßig gilt:

$$\omega_0 \simeq \frac{c}{a_0} \sim \frac{m c^2}{\hbar} \tag{4}$$

und das Impulsmoment J andererseits gleich $^1/_2\, \hbar$ ist, so wird die Energie der Rotation

$$E_r \simeq \omega_0 J \simeq m c^2 . \tag{5}$$

Die elektrostatische Energie E_e ist bei der Dimensionierung (2) des Modells um einen Faktor von der Größenordnung α kleiner als $m c^2$ und kann daher näherungsweise vernachlässigt werden. Dasselbe gilt aber auch für die magnetische Energie E_m des Systems:

$$E_e \simeq E_m \simeq \alpha \cdot m c^2 . \tag{6}$$

Zunächst ergibt eine elementare geometrische Überlegung, daß das magnetische Moment M von der Größenordnung eines Bohrschen Magnetons ist:

$$M \simeq e\, a_0 \simeq \frac{e \hbar}{2 m c}, \tag{7}$$

wie zu erwarten ist. Für die magnetische Energie folgt hieraus (durch Integration über die magnetische Feldenergie $\mathfrak{H}^2/8\pi$)[1]):

$$E_m \simeq \frac{M^2}{a_0^{\,3}} \simeq \frac{(e\, a_0)^2}{a_0^{\,3}} = \frac{e^2}{a_0} = \frac{e^2}{\hbar c} m c^2 = \alpha \cdot m c^2 .$$

Für das Modell ist somit bezeichnend, daß weder die elektrische noch die magnetische Energie hinreicht, für die Eigenenergie des Elektrons aufzukommen, daß also der überwiegende Anteil der Eigenenergie nicht elektromagnetischen Ursprungs ist. Das vielleicht Befremdende dieser Auffassung wird wohl durch den Hinweis abgeschwächt, daß durch die Entdeckung ungeladener träger Teilchen (Neutronen) die Auffassung vom elektromagnetischen Ursprung der Trägheit jedenfalls weitgehend fraglich geworden ist.

Die im vorstehenden entwickelten größenordnungsmäßigen Beziehungen scheinen jedoch eine Verschärfung zuzulassen, welche es nahelegen, die Züge des Modells I abzuändern. Wir wollen das so abgeänderte Modell als Modell II dem eben besprochenen gegenüberstellen und es folgendermaßen charakterisieren:

1) In der vorläufigen Mitteilung des Verf. (a. a. O.) wurde die Rotationsenergie mit der magnetischen Energie irrtümlicherweise als identisch angesehen. Die Born-Schrödingersche Berechnung des Elektronenradius, welche auf der Gleichsetzung von magnetischer und Selbstenergie beruht und dabei zu einem von (2) verschiedenen Ergebnis führt, ist in sich konsequent, wie hier ausdrücklich bemerkt werden soll.

Modell II: Die grundlegende Annahme soll darin bestehen, daß — ein „makroskopisch" ruhendes Elektron (oder Positron) vorausgesetzt — ein „Massenpunkt", ein fingiertes Zentrum im Abstand

$$a = \frac{\hbar}{2 m c} \tag{2'}$$

mit Lichtgeschwindigkeit umkreist. Seine Masse sei gleich der Ruhmasse des Elektrons m [1]).

Bei dieser Annahme wird nämlich einerseits das Impulsmoment genau gleich $^1/_2\, \hbar$, während andererseits die Umlaufsfrequenz

$$\omega = \frac{c}{a} = \frac{2 m c^2}{\hbar} \tag{4'}$$

und daher die Energie der Rotation genau gleich $m c^2$ wird:

$$E_r = c \cdot \frac{J}{a} = \omega J = m c^2 . \tag{5'}$$

Das magnetische Moment ergibt sich bis auf den anomalen Faktor 2 als übereinstimmend mit dem Bohrschen Magneton:

$$M = e\, a = \frac{e \hbar}{2 m c} . \tag{7'}$$

Das Modell II des umlaufenden Massenpunktes unterscheidet sich von dem oben skizzierten Modell I der rotierenden Ladungsverteilung trotz der weitgehenden quantitativen Übereinstimmung der maßgebenden Größen doch grundsätzlich. Der Unterschied kommt vor allem darin zum Ausdruck, daß die zweite Fassung eine Rückkehr zum *Punktelektron* bedeutet. Es scheint dann aber nicht mehr ohne weiteres möglich, dem Massenpunkt zugleich eine Punktladung (oder überhaupt eine Ladung mit Lineardimensionen $\leqq r_0$) anzuheften, da eine solche Ladung zu einer unendlich großen (bzw. $m c^2$ übertreffenden) Selbstenergie führen müßte. Diese Schwierigkeit wäre jedoch nur vom Standpunkt einer rein elektrodynamischen Auffassung der Materie sehr ernst zu nehmen, von der wir uns hier weitgehend entfernen. Wir wollen daher von der elektrostatischen und magnetischen Energie des Systems hier ganz absehen. Andererseits muß jedoch betont werden, daß bei der Berechnung des magnetischen Moments des Elektrons eine Anleihe an die gewöhnliche Elektrodynamik gemacht worden ist.

Wie in einer weiteren Untersuchung gezeigt werden soll[2]), dürfte Modell II in einer sehr weitgehenden, bis in feine Einzelheiten verfolgbaren korrespondenzmäßigen Analogie zum Verhalten des

1) Masse m bei der Lichtgeschwindigkeit c! Die „eigentliche" Ruhmasse des Massenpunktes ist also wie beim Photon gleich Null.

2) Vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit von A. Papapetrou und dem Verf.

Diracschen Elektrons stehen. Auf die seltsam verwickelten Verhältnisse, die für das Diracsche Elektron schon im kräftefreien Fall charakteristisch sind, ist zuerst von Schrödinger hingewiesen worden; die Bewegung selbst ist von Schrödinger als eine Art „Zitterbewegung" beschrieben worden[1]). Es hat den Anschein, daß die Eigentümlichkeiten dieser „Zitterbewegung" durch das Modell des umlaufenden Massenpunktes weitgehend anschaulich gedeutet werden können. Wir möchten vor allem aus diesem Grunde — von den aus der Quantentheorie entspringenden Einwänden gegen eine kontinuierliche rotierende Ladungsverteilung ganz abgesehen — dem Modell II gegenüber Modell I den Vorzug geben und die aus der Elektrodynamik sich erhebenden Bedenken daher einstweilen zurückstellen.

Im folgenden § 2 soll zunächst die Hypothese eingeführt werden, daß die Kinematik des Elektrons *nach Analogie* der Bewegungsgesetze des symmetrischen Kreisels beschrieben werden kann[2]). Dabei muß jedoch vorläufig darauf verzichtet werden, diese Annahme aus dynamischen Bewegungsgleichungen für das Elektronenmodell näher zu begründen. *Unser Ziel ist der Nachweis, daß die genannte Hypothese ausreicht, um die Zerfallswahrscheinlichkeit von Elektron–Positron-Paaren in größenordnungsmäßiger Übereinstimmung mit einer zuerst von Fermi und Uhlenbeck*[3]) *aus der Diracschen Theorie abgeleiteten Formel korrespondenzmäßig zu berechnen* (§ 3). Dieser Nachweis gelingt jedoch nur bei Annahme eines Elektronenmodells mit dem Radius (2) bzw. (2') und der für dieses Modell charakteristischen Energiegleichung (5) bzw. (5'). Es dürfte daher vielleicht gerechtfertigt sein, die Ausführungen dieser Arbeit als eine Stütze zugunsten des in diesem Paragraphen charakterisierten Elektronmodells anzusehen.

§ 2. Eine die Kreiselbewegung des Elektrons (und Positrons) betreffende Hypothese

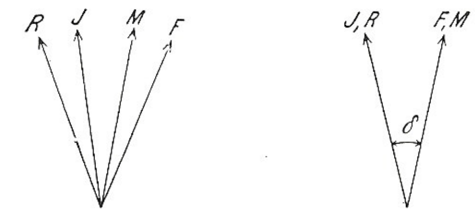
Die allen folgenden Überlegungen zugrunde liegende Hypothese soll darin bestehen, daß das Verhalten des Elektrons (und Positrons)

1) E. Schrödinger, Berl. Ber. 1930, S. 416.

2) Natürlich soll hiermit nicht gesagt werden, daß das Elektron als „starrer Körper" aufgefaßt werden soll. Bekanntlich läßt sich nach der Relativitätskinematik ein zeitlich veränderlicher Rotationszustand eines starren Körpers nicht in widerspruchsfreier Weise beschreiben. Es mag daher vielleicht als ein Vorteil des Modells II aufgefaßt werden, daß es sie von der Fiktion eines starren Körpers als Modell des Elektrons befreit.

3) E. Fermi u. G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **44**. S. 510. 1933. Vgl. auch die genaueren Rechnungen von Y. Nishina, S. Tomonaga u. H. Tamaki, Scient. Pap. of the Inst. of Phys. and Chem. Research (Tokyo) **24**. Suppl. S. 7. 1934.

gegenüber Störungen durch äußere Felder in kinematischer Hinsicht analog sein soll dem Verhalten eines schnell rotierenden symmetrischen Kreisels bei äußerem Zwang. Diese Annahme setzt voraus, daß schon das *kräftefreie* Elektron außer seiner normalen Rotation um die „Figurenachse" eine allgemeinere „Poinsotbewegung" ausführen kann, bei welcher die Rotationsachse R und die Achse des Impulsmoments J weder mit der Figurenachse F noch unter sich zusammenfallen. Da wir jedoch über die „Gestalt" des Elektrons keine speziellen Voraussetzungen machen wollen, soll die relative Lage der jedenfalls in einer Ebene liegenden drei Achsen F, J, R im übrigen unbestimmt bleiben. Entscheidend für die Kinematik der Kreiselbewegung wird jedoch die Annahme sein,



a) b)

Abb. 1. Mögliche Anordnung von Rotationsachse (R), Impulsachse (J), magnetischer Achse (M) und Figurenachse (F) bei der kräftefreien Bewegung des Kreiselelektrons. a) allgemeiner Fall, b) vereinfachter Spezialfall (Kugelkreisel)

daß bei der allgemeinen Poinsotbewegung magnetisches Moment M und Impulsmoment J (Spin) nicht mehr der Richtung nach zusammenfallen[1]). Eine mögliche Anordnung der vier Achsen F, J, R, M zeigt Abb. 1a. Da wir jedoch unsere Überlegung so einfach wie möglich gestalten und jede unnötige Komplizierung vermeiden wollen, wird es für die folgenden größenordnungsmäßigen Abschätzungen jedenfalls ausreichend sein, wenn wir R mit J und M mit F zusammenfallen lassen. (Abb. 1b.) Das Zusammenfallen der Achsen J und R

1) Diese Annahme mag etwa so plausibel gemacht werden: Aus der Tatsache der anomalen Zeemaneffekte (und verwandter Erscheinungen) folgt zunächst nur, daß der anomale Faktor 2 im Verhältnis von magnetischem und mechanischem Moment (Spin) jedenfalls für die normale Rotation des Elektrons um die Figurenachse mit großer Annäherung zutrifft. Besitzt die Drehgeschwindigkeit des Elektrons aber außer der in die Figurenachse fallenden noch eine andere Komponente, so scheint es wenig wahrscheinlich, daß für diese zweite Komponente ebenfalls der Faktor 2 maßgebend sein wird. In jedem anderen Falle müssen aber die Achsen des magnetischen und mechanischen Moments im allgemeinen auseinanderfallen und man kann annehmen, daß die magnetische Achse M des Elektrons zwischen die Figurenachse F und die Spinachse J zu liegen kommt.

besagt, daß wir den Elektronenkreisel einfachheitshalber als „Kugelkreisel“ voraussetzen. Damit können wir unsere Hypothese dahin aussprechen, *daß sich die Achsen des Impulsmoments und magnetischen Moments des Elektrons wie Rotationsachse und Figurenachse eines Kugelkreisels verhalten sollen* [1]).

Greift an einem Punkte der Figurenachse eines symmetrischen bzw. Kugelkreisels eine konstante äußere Kraft an, so führt der Kreisel bekanntlich diejenige Bewegung aus, welche nach dem Vorgang von Klein und Sommerfeld als *pseudoreguläre Präzession* bezeichnet wird [2]). Sie besteht bei einem schnell rotierenden Kreisel darin, daß die Figurenachse die Rotationsachse in raschen Nutationsumläufen umkreist, während diese mit (im Zeitmittel) konstanter, aber (nach Maßgabe des einwirkenden Kraftmoments) im allgemeinen viel kleineren Umlaufsgeschwindigkeit um die Richtung der äußeren Kraft einen Präzessionskegel beschreibt [3]). Während die räumliche Lage und Öffnung des Präzessionskegel in jedem Augenblick durch die Richtung der einwirkenden Kraft bestimmt ist, hängt die Öffnung des im allgemeinen sehr engen Nutationskegels von den jeweiligen Anfangsbedingungen ab und wird bei zeitlichen Änderungen der äußeren Kräfte raschen Schwankungen unterworfen sein.

Diese für den Kreisel eigentümlichen Verhältnisse sollen nun sinngemäß auf das Kreiselelektron übertragen werden. Als äußere Kraft kommt dabei in erster Linie die am Orte des Elektrons wirkende magnetische Kraft in Frage — sei es, daß diese als äußeres Magnetfeld gegeben ist, oder sei es, daß sie erst bei der Bewegung des Elektrons durch ein elektrisches Feld als „Scheinkraft“ auftritt — welche auf die Achse des magnetischen Moments bzw. die Figurenachse ein Kraftmoment ausübt. Sodann wird aber die Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung von wesentlicher Bedeutung sein, welche den Öffnungswinkel des Nutationskegels der magnetischen bzw. Figurenachse dauernd zu verkleinern sucht, da nach den Gesetzen der Elektrodynamik die Nutation der magnetischen Achse des Elektrons mit der Aussendung von Strahlung

1) Bei einem Kugelkreisel hat die Figurenachse lediglich die Bedeutung einer im Kreiselkörper festliegenden Achse, welche um die Rotationsachse bzw. Impulsachse „präzediert“.

2) F. Klein u. A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, B. G. Teubner, Leipzig 1897/1910. Vgl. insbesondere Kap. V.

3) Die Nutation wird auch vielfach als „Präzession 2. Ordnung“ bezeichnet, da sie der Präzession der Figurenachse bei der Poinsotbewegung im kräftefreien Fall entspricht. Es ist zweckmäßig, diese Auffassung für die folgenden Überlegungen im Auge zu haben!

verbunden ist. Gegenüber den Strahlungsverlusten infolge der raschen Nutationsbewegung sind die Strahlungsverluste infolge der langsam erfolgenden Präzession vernachlässigbar klein, da die ausgestrahlte Energie bekanntlich der vierten Potenz der Frequenz proportional ist.

Nach den kinematischen Gesetzen der (nicht relativistischen) Kreiseltheorie erfolgen die Nutationsumläufe der Figurenachse eines symmetrischen Kreisels mit einer Frequenz ω_n, welche sich von der Frequenz ω der Eigenrotation nur (nach Maßgabe der Trägheitsmomente) um einen Faktor von der Größenordnung 1 unterscheidet und für den Kugelkreisel sogar genau gleich 1 wird ($\omega_n = \omega$). Dies bedeutet, daß wir für das ruhende Kreiselelektron — zunächst jedenfalls größenordnungsmäßig — anzunehmen haben, vgl. (4'):

$$\omega_n = \omega = \frac{2\,m\,c^2}{\hbar}. \tag{8}$$

Nach klassischer Auffassung würde demnach das Elektron fortwährend Strahlung dieser Frequenz emittieren, wobei die pro Zeiteinheit emittierte Energie durch die Amplitude der Nutation, d.h. durch den Öffnungswinkel des Nutationskegels bestimmt wird. Die korrespondenzmäßige Übersetzung dieser Behauptung in die Sprache der Quantentheorie besagt dann, daß das System Strahlungsquanten der Energie

$$\hbar\,\nu = \hbar\,\omega = 2\,m\,c^2 \tag{8'}$$

emittiert. *Prozesse dieser Art können aber nur Zerstrahlungsvorgänge von Elektron—Positron-Paaren sein*, bei welchen — ein *ruhendes* Elektron—Positron-Paar vorausgesetzt — gerade die Energie $2\,m c^2$ in ein Strahlungsquant verwandelt wird [1]).

Wir wollen daher weiterhin annehmen, daß die Frequenz der Nutationsumläufe des Elektronenkreisels — auch im extrem relativistischen Fall — genau durch (8) wiedergegeben wird. Die

1) Handelt es sich im Gegensatz hierzu um ein Elektron—Positron-Paar, dessen Komponenten in bezug auf den Schwerpunkt die Geschwindigkeit $\pm v = \pm \beta c$ besitzen, so sind die scheinbaren Frequenzen der Rotation und Nutation für die beiden Teilchen im Schwerpunktsystem nach dem Dopplerprinzip $\frac{2\,m\,c^2}{\hbar} \cdot \frac{1 \pm \beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, wenn ϑ den Winkel der Beobachtungsrichtung gegen die Verbindungslinie der Teilchen mißt. Der Mittelwert aus diesen Frequenzen $\frac{2\,m c^2}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}$ entspricht korrespondenzmäßig genau der zusätzlichen kinetischen Energie der Teilchen im Schwerpunktsystem.

Berechnung der durch die Schwankungen der magnetischen Achse eines Elektrons oder Positrons pro Zeiteinheit ausgesandten Energie liefert dann nach Division durch die Quantenenergie $\hbar\omega = 2mc^2$ ein Maß für die Zahl der pro Zeiteinheit stattfindenden Wiedervereinigungsprozesse von Elektron–Positition-Paaren.

Fermi und Uhlenbeck[1]) betrachten den Durchgang von langsamen Positronen $\left(\beta = \frac{v}{c} \ll 1\right)$ durch ein Atom mit der Kernladung Z und berechnen hierfür den Wiedervereinigungsquerschnitt nach der Diracschen Theorie. Versucht man, den Vorgang der Wiedervereinigung von Elektron–Positron-Paaren für diesen Fall korrespondenzmäßig zu beschreiben, so wird man die pseudoreguläre Präzession der magnetischen Achse eines *Positrons* auf seiner klassischen Bahn durch das Atomfeld zu verfolgen und dabei die pro Bahnelement emittierte „Zerstrahlungsenergie“ zu berechnen haben. Dieser Energieanteil wird für die korrespondenzmäßige Abschätzung der Wahrscheinlichkeit der Wiedervereinigung von Paaren ausreichend sein, ohne daß dabei die Rückwirkung des Positrons auf die Präzessionsbewegung der an den Kern gebundenen Elektronen explizite in Rechnung gesetzt zu werden braucht.

Bevor wir uns dieser Aufgabe zuwenden, soll hier noch die *Dämpfungskonstante* γ für das Abklingen der Nutation infolge der Strahlungsdämpfung entsprechend den Annahmen dieses Paragraphen abgeschätzt werden. Beim Durchgang eines Elektrons oder Positrons durch ein elektromagnetisches Feld wird von diesem Energie auf die Präzession und Nutation des Elektronen- bzw. Positronenkreisels übertragen. (Wir nennen diese Energieanteile E_p und E_n). Während sich E_p nur „langsam“ ändert, wird E_n innerhalb der Abklingungszeit der Nutation $\tau = \frac{1}{\gamma}$ auf dem e-ten Teil abgenommen haben (sofern nicht Störungen eine neue Anfachung der Nutation bewirken). Man sieht nun leicht, daß für den schnellen symmetrischen Kreisel größenordnungsmäßig der Zusammenhang

$$(9) \qquad \delta^2 \simeq \frac{E_n}{E_p}$$

zwischen dem Öffnungswinkel δ des Nutationskegels und der Nutationsenergie E_n besteht[2]). Andererseits läßt sich die pro Zeiteinheit stattfindende Energieabnahme dE_n/dt infolge der Strahlungsverluste rein elektrodynamisch berechnen. Eine einfache Rechnung liefert (magnetischer Dipol):

$$(10) \qquad -\frac{dE_n}{dt} = \frac{4\,\omega^4 M^2}{3\,c^3}\,\delta^2$$

(M magnetisches Moment). Aus (9) und (10) folgt demnach wegen (5) bzw. (5′)

$$-\frac{dE_n}{dt} \simeq \frac{\omega^4 M^2}{c^3} \cdot \frac{E_n}{mc^2} = \gamma E_n$$

oder

$$(11) \qquad \gamma \simeq \frac{\omega^4 M^2}{mc^5},$$

was mit Rücksicht auf (3), (7) und (8) auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(11') \qquad \gamma \simeq \alpha \cdot \frac{mc^2}{\hbar}.$$

Aus (11′) ergibt sich unmittelbar, daß der Weg

$$c\tau = \frac{1}{\alpha}\frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar^2}{me^2} = a_{\mathrm{H}},$$

auf dem die Energie E_n eines mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Teilchens auf $1/e$ seines Betrags abklingt, von der Größenordnung der Atomdurchmesser ist (a_{H} = Radius der Bohrschen Grundbahn im H-Atom). Da wir die Berechnung der Zerstrahlungsenergie unter der Voraussetzung ausführen werden, daß schon auf — mit dem Atomdurchmesser verglichen — kleinen Wegstrecken Gleichgewicht zwischen der Aufnahme von Feldenergie (in Gestalt der Energie E_n) und der Abgabe von Strahlungsenergie stattfindet, so ist diese Voraussetzung demnach daran geknüpft, daß die Geschwindigkeit der Elektronen und Positronen klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist ($\beta \ll 1$). Unter der gleichen Voraussetzung sind auch die Rechnungen von Fermi und Uhlenbeck ausgeführt.

1) E. Fermi u. G. E. Uhlenbeck, a. a. O.

2) Daß die Beziehung (9) auch noch im extrem relativistischen Falle zu Recht besteht, soll bei anderer Gelegenheit gezeigt werden. Vgl. Anm. 2) S. 569.

§ 3. Berechnung des Wiedervereinigungsquerschnitts eines Elektron-Positron-Paares beim Durchgang eines Positrons durch ein Atom. Vergleich mit der Formel von Fermi und Uhlenbeck

Relativ zu dem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ das elektrische Feld eines Atoms $\mathfrak{E}$ durchsetzenden Positron existiert — von höheren Gliedern in v/c abgesehen — ein Magnetfeld

$$(12) \qquad \mathfrak{H} = -\frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}],$$

das auf die magnetische Achse (Figurenachse) des Positrons ein Drehmoment

$$(13)\qquad \mathfrak{D} = [\mathfrak{M}\mathfrak{H}] = -\frac{1}{c}\,[\mathfrak{M}\,[\mathfrak{v}\mathfrak{E}]]$$

ausübt ($\mathfrak{M}$ = magnetisches Moment des Positrons), demzufolge das Positron um die augenblickliche Richtung von $\mathfrak{H}$ zu präzedieren sucht. Ein für einen ruhenden Beobachter vorhandenes, mit der Geschwindigkeit v proportionales elektrisches Moment des Positrons[1]), an welchem das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ angreift, verschwindet für einen mit dem Positron mitbewegten Beobachter, auf dessen Standpunkt wir uns daher im folgenden einfachheitshalber stellen wollen.

Da die Nutationsamplitude δ von der zeitlichen Änderung von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ am Orte des Positrons abhängen wird, entwickeln wir diese Größen in Potenzreihen nach der Zeit t, die wir mit dem linearen Gliede abbrechen:

$$(12')\qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + (\dot{\mathfrak{H}})_0 t + \dots$$

$$(13')\qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 + (\dot{\mathfrak{D}})_0 t + \dots = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1 + \dots,$$

wobei nach (13)

$$(14)\qquad \mathfrak{D}_0 = [\mathfrak{M}\mathfrak{H}]_0$$

$$(15)\qquad \mathfrak{D}_1 = (\dot{\mathfrak{D}})_0 t = \{[\mathfrak{M}\dot{\mathfrak{H}}]_0 + [\dot{\mathfrak{M}}\dot{\mathfrak{H}}]_0\}\, t, \dots$$

Sofern wir von dem Einfluß der Strahlungsdämpfung zunächst absehen, soll die Bewegung des Positronenkreisels dann gemäß der dynamischen Grundgleichung der Kreiseltheorie

$$(16)\qquad \dot{\mathfrak{J}} = \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1 + \dots$$

erfolgen, wobei $\mathfrak{J}$ den Vektor des Impulsmoments bedeutet ($|\mathfrak{J}| = J$).

Wir betrachten zunächst den Fall $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ und die zugehörige *reguläre Präzession* der Kreiselachse[2]). Es ist für das Folgende von Bedeutung, den Winkel δ_0 zwischen Figurenachse F und Impuls-

1) Vgl. z. B. J. Frenkel, Ztschr. f. Phys. **37**. S. 243. (1926).

2) Würde man $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{J}$ genau proportional annehmen $\left(\mathfrak{M} = \frac{e}{m\,c}\,\mathfrak{J}\right)$, so würde sich für ein zeitlich konstantes $\mathfrak{H}$-Feld nach (14) und (16) eine reguläre Präzession, keine Nutation ergeben. Da wir jedoch die Voraussetzung der Parallelität von $\mathfrak{M}$ nach $\mathfrak{J}$ aufgeben (§ 2), wird die Präzession auch in dem einfachsten Falle $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ im allgemeinen pseudoregulär. Der oben zunächst betrachtete Fall entspricht dem Sonderfall $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ der regulären Präzession, *ohne* daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{J}$ der Richtung nach zusammenfallen.

achse J für diesen Sonderfall zu kennen. Aus Abb. 2 liest man ab ($\mu \ll \omega$, $\omega \simeq \omega'$):

$$(17)\qquad \delta_0 \simeq \frac{\mu}{\omega} \sin\vartheta,$$

wenn μ die Präzessionsgeschwindigkeit des Kreisels um $\mathfrak{H}_0$ und ϑ der Winkel zwischen $\mathfrak{H}_0$ und F (bzw. J) ist. Nach (16) ist dabei

$$(18)\qquad \mu = \frac{|\mathfrak{D}_0|}{J \sin\vartheta},$$

so daß nach (17), (18) und (5′)

$$(19)\qquad \delta_0 = \frac{|\mathfrak{D}_0|}{\omega J} = \frac{|\mathfrak{D}_0|}{m\,c^2}$$

wird.

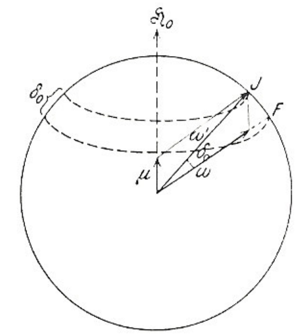


Abb. 2. Reguläre Präzession der Figuren- und Impulsachse des Kreiselelektrons

Sodann nehmen wir $\mathfrak{D}_0 = 0$ an und denken uns von $t = 0$ an ein linear in t anwachsendes Kraftmoment $\mathfrak{D}_1 = (\dot{\mathfrak{D}})_0 t$ wirkend. Eine kinematische Überlegung über die sukzessive Verlagerung der Kreiselachse führt dann zu dem Ergebnis, daß die Abweichung δ der Lage der Impulsachse von der Figurenachse linear in t zunimmt gemäß[1])

$$(20)\qquad \delta = \frac{|\mathfrak{D}_1|}{\omega J} = \frac{|\dot{\mathfrak{D}}|_0}{m\,c^2}\, t.$$

Da δ linear in t anwächst, so würde die Amplitude der Nutation der Figurenachse dauernd zunehmen, wenn nicht zugleich die

1) Man überlege sich, daß die Impulsachse sich aus ihrer ursprünglichen, mit der Figurenachse zusammenfallenden Lage relativ zu einem mit dem Kreiselkörper festverbundenen Koordinatensystem auf einer archimedischen Spirale zu entfernen sucht. Diese Bewegungsform kommt dadurch zustande, daß einerseits der Betrag des Moments $|\mathfrak{D}_1|$ linear in t zunimmt, andererseits infolge der Rotation die Richtung des Moments periodisch mit der Frequenz ω wechselt. Aus (16) folgt unmittelbar, daß die Winkeländerung $d\psi$ der Richtung $\mathfrak{J}$ (bzw. der Rotationsachse) pro Zeitelement dt durch $d\psi = \frac{|\mathfrak{D}_1|\,dt}{J}$ gegeben wird. Denkt man sich die sukzessiven Lageänderungen der Impulsachse durch unstetige, in zeitlichen Abständen dt erfolgende Impulsstöße hervorgebracht, so sieht man, daß $d\psi$ das Linienelement der Spiralbewegung von J auf der Einheitskugel darstellt. Der Umfang der Spirale (zur Zeit t) ist also

$$2\pi\,\delta = \frac{|\mathfrak{D}_1|}{J} \cdot \frac{2\pi}{\omega},$$

da $2\pi/\omega$ die Umlaufzeit der Rotation ist. Hieraus ergibt sich der Radius δ in Übereinstimmung mit (20).

Strahlungsdämpfung die Amplitude zu verkleinern suchte, so daß sich schließlich eine stationäre Amplitude einstellt.

Aus (20) folgt zunächst

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{|\dot{\mathfrak{D}}|_0}{mc^2}, \qquad \frac{d(\delta^2)}{dt} = 2\delta\frac{d\delta}{dt} = 2\delta\frac{|\dot{\mathfrak{D}}|_0}{mc^2}.$$

Die durch das Dämpfungsglied vervollständigte zeitliche Ableitung von δ^2 ist daher

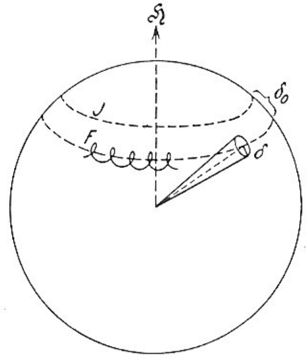


Abb. 3. Pseudoreguläre Präzession der Figuren- (bzw. magnetischen) Achse des Kreiselelektrons. Eingezeichneter Kegel: Nutationskegel (Öffnungswinkel δ)

$$\frac{d(\delta^2)}{dt} - 2\delta\frac{|\dot{\mathfrak{D}}|_0}{mc^2} - \gamma\delta^2. \tag{21}$$

Die Stationäritätsbedingung $\frac{d(\delta^2)}{dt} = 0$ ergibt dann

$$\delta = \delta' = \frac{2|\dot{\mathfrak{D}}|_0}{\gamma\cdot mc^2}. \tag{22}$$

Eine eingehendere Überlegung zeigt nun, daß (20) und (22) auch dann noch zu Recht bestehen, wenn man den allgemeinen Fall betrachtet, daß zur Zeit $t = 0$ $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ von Null verschieden sind, sofern man jetzt unter δ bzw. δ' die Abweichung der Figurenachse von der durch δ_0, Gl. (19), bestimmten „Normallage" bei der regulären Präzession versteht[1]). Die Präzession der Figurenachse ist in diesem allgemeinen Falle *pseudoregulär* und der Öffnungswinkel des Nutationskegel wird in jedem Augenblick durch δ bestimmt. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß ein stationärer Wert δ' von δ gar nicht erreicht werden kann, da die stationäre Einstellung von δ durch die gleichzeitige Änderung von δ_0 dauernd gestört wird. Da jedoch, wie der Vergleich von (19), (20) und (22) unmittelbar zeigt, die Änderung von δ_0 während der Einstellzeit $\tau = \frac{1}{\gamma}$ von δ in δ' gerade die Größenordnung von δ besitzt, so wird man zugeben, daß (22) jedenfalls mit dem Mittelwert der Amplitude δ größenordnungsmäßig übereinstimmen wird. Die Kenntnis des Mittelwertes von δ ist aber für unsere korrespondenzmäßige Überlegung ausreichend. Es wird also in jedem Augenblick der Mittelwert $\bar{\delta}$ von δ näherungsweise durch

$$\bar{\delta} \simeq \frac{|\dot{\mathfrak{D}}|}{\gamma\cdot mc^2} \tag{23}$$

1) Diese Unterscheidung ist notwendig, da sich herausstellt, daß im allgemeinen $\delta_0 \gg \delta$ ist; vgl. Anm. 1) der folgenden Seite.

dargestellt werden können, sofern sich nur $\dot{\mathfrak{D}}$ während der Einstellzeit $1/\gamma$ nicht wesentlich ändert, welche Bedingung nach der Schlußbemerkung von § 2 für hinreichend langsame Positronen erfüllt ist ($\beta \ll 1$).

Nun ist nach (13)

$$\dot{\mathfrak{D}} = [\mathfrak{M}\dot{\mathfrak{H}}] + [\dot{\mathfrak{M}}\mathfrak{H}] \simeq [\mathfrak{M}\dot{\mathfrak{H}}], \tag{24}$$

da, wie eine Abschätzung zeigt, das zweite Glied gegen das erste zu vernachlässigen ist in (demselben Maße als $\alpha^2 Z \ll 1$ ist). Andererseits ist

$$\dot{\mathfrak{H}} = -\frac{1}{c}[\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{E}}] = -\frac{1}{c}[\mathfrak{v}, (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\mathfrak{E}], \tag{25}$$

da nach der Bewegungsgleichung für das Positron $\dot{\mathfrak{v}} \sim \mathfrak{E}$ ist. Einsetzen von (25) in (24) ergibt[1])

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{1}{c}\left[\mathfrak{M}[\mathfrak{v}, (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\mathfrak{E}]\right]. \tag{26}$$

Für die Berechnung der pro Zeitelement dt ausgestrahlten Energie knüpfen wir an (10), § 2, an, wobei wir jetzt δ durch $\bar{\delta}$ zu ersetzen haben. Die mittlere Anzahl dn der pro dt emittierten Quanten der Energie $\hbar\omega = 2mc^2$ ist demnach

$$dn \simeq \frac{1}{\hbar\omega}\cdot\frac{\omega^4 M^2 \bar{\delta}^2}{c^3}\,dt. \tag{27}$$

1) Es ist übrigens von Interesse, nach (19), (23) und (26) die Größenordnung von δ_0 und δ für den Durchgang eines Positrons durch das Atomfeld eines Z-fach geladenen Kernes abzuschätzen. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\delta_0 \simeq \alpha^3\beta Z\cdot\left(\frac{a_H}{r}\right)^2, \tag{28}$$

$$\delta \simeq \alpha^3\beta^2 Z\cdot\left(\frac{a_H}{r}\right)^3, \tag{29}$$

wenn r der Abstand des Positrons vom Kern, $\beta = \frac{v}{c}$ seine Anfangsgeschwindigkeit und a_H der Radius des H-Atoms ist. Da wir $\beta \ll 1$ vorausgesetzt haben, so ist demnach auch

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \beta\frac{a_H}{r} \tag{30}$$

im allgemeinen $\ll 1$, die Figurenachse beschreibt also eine sehr *gestreckte* Zykloide (Sinuslinie). Die Kleinheit von (28) und (29) sowie des Verhältnisses δ/δ_0 liefert nachträglich die Berechtigung des angewandten Verfahrens.

Ebenso überlegt man sich leicht, daß die Spinachse des Positrons infolge der Präzession während des Durchgangs durch ein Atom im wesentlichen unabhängig von β und Z nur eine sehr kleine Winkeldrehung von der Größenordnung $\alpha^2\cdot 2\pi$ ausführt.

Der *Wiedervereinigungsquerschnitt* σ des Positrons mit einem Elektron des Atoms ergibt sich hieraus, indem man (27) einmal über alle Elemente ds einer Bahn des Positrons, sodann über alle Bahnen, d. h. die ganze Schaufläche f des Atoms integriert:

$$\sigma \simeq \frac{\omega^3 M^2}{\hbar c^3} \int df \int \frac{ds}{v} \overline{\delta^2}. \tag{28}$$

Einsetzen von (23) und (26) in (28) ergibt nunmehr

$$\sigma \simeq \frac{\omega^3 M^2}{\hbar c^5 \gamma^2 (m c^2)^4} \int df \int \frac{ds}{v} \overline{[\mathfrak{M}\,[\mathfrak{v}, (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E}]]^2}, \tag{28'}$$

wobei noch Mittelung über alle Anfangsrichtungen von $\mathfrak{M}$ vorzunehmen ist.

Im Rahmen unserer Korrespondenzbetrachtung können wir uns mit einer groben Abschätzung des Integrals (28') begnügen. Hierbei wollen wir das Atom als eine Fermische statistische Ladungsverteilung schematisieren, der gemäß sich Elektronendichte und Potential für alle Atome als universelle Funktion der Variabeln

$$\varrho = \frac{r}{a_H} Z^{1/3}, \qquad a_H = \frac{\hbar^2}{m e^2} \tag{29}$$

(r Abstand vom Atomkern) darstellen läßt. Als „Radius des Atoms" wird man dabei die Länge

$$a_F = a_H Z^{-\frac{1}{3}} = \frac{\hbar^2}{m e^2} Z^{-\frac{1}{3}} \tag{29'}$$

ansehen können. Die nach (28') auszuführende Integration $\int df \ldots$ wollen wir dann durch Multiplikation des Integranden mit $f = \pi a_F^2$ und entsprechend die Integration $\int \frac{ds}{v} \cdots$ durch Multiplikation mit der „Verweilzeit" des Positrons im Innern des Atoms $2a_F/v$ ersetzen [1]. Schließlich soll der Integrand $\overline{[\cdots]^2}$ selbst näherungsweise durch

$$M^2 v^4 \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial r}\right)^2_{r = a_F} \simeq M^2 v^4 \frac{e^2 Z^4}{a_H^6}$$

ersetzt werden. Hiernach erhält man statt (28')

$$\sigma \simeq \frac{\omega^3 M^4 e^2}{\hbar \gamma^2 m^2 c^6} \left(\frac{v}{c}\right)^3 Z^3. \tag{30}$$

1) Eine derartige Ersetzung kann nur dann zu einem größenordnungsmäßig richtigen Ergebnis führen, wenn die Energie des Positrons so groß ist, daß sich das Positron bei etwa zentralem Stoß dem Atomkern auf einen Abstand nähert, der wesentlich kleiner als a_F ist. Vgl. weiter unten im Text.

Um den Vergleich mit Fermi und Uhlenbeck zu ermöglichen, wollen wir die Geschwindigkeit v durch die Energie des Positrons W' in Rydberg-Einheiten $Rh = \frac{e^2}{2a_H}$ ausdrücken. Man erhält

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{e^2 W'}{m c^2 a_H}} = \sqrt{\frac{r_0}{a_H}}\, W' = \alpha \sqrt{W'} \tag{31}$$

$\left(W \text{ Energie in erg}; \quad \frac{r_0}{a_H} = \alpha^2, \quad \text{vgl. (1) und (29)}\right)$.

Einsetzen von ω, M und γ aus (4'), (7') und (11) bzw. (11') sowie von (31) in (30) liefert nunmehr nach gehöriger Reduktion, wobei man, wie schon gelegentlich, von der Hierarchie der Größenordnungen der fundamentalen Längen a_H, $a_0 = 2a$, r_0 [vgl. (29), (2), (2') und (1)]:

$$a_H : a_0 : r_0 = 1 : \alpha : \alpha^2 \tag{32}$$

Gebrauch zu machen hat, *das Ergebnis;*

$$\sigma \simeq C \cdot \alpha^9 Z^6 a_H^2 \left(\frac{W'}{Z^2}\right)^{3/2}, \tag{33}$$

wobei C ein Zahlenfaktor von der Größenordnung 1 ist.

Wir vergleichen schließlich unser Ergebnis mit den Formeln von Fermi und Uhlenbeck, sowie Nishina, Tomonaga und Tamaki [1]. Nach den Rechnungen dieser Autoren auf Grund der Diracschen Theorie, bei welcher der Zerstrahlung von Paaren in bekannter Weise Übergänge zwischen Zuständen positiver und negativer Energie zugeordnet werden, läßt sich der Querschnitt σ_S für die Wiedervereinigung eines Positrons mit einem Elektron der Atomschale S durch einen Ausdruck der Form

$$\sigma_S = C_S' \cdot \alpha^9 Z^6 a_H^2 F_S\left(\frac{W'}{Z^2}\right) \tag{34}$$

darstellen, wobei für die K- und L-Schale gilt [2]:

$$C_K' = \frac{8\pi^2}{3}, \quad F_K(x) = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sqrt{x}}} - 1}\left\{1 + \frac{3}{32}(\pi^2 + 4)\frac{1}{x}\right\}, \tag{34a}$$

$$C_L' = \frac{\pi^2}{3}, \quad F_L(x) = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\sqrt{x}}} - 1}\left\{1 + \frac{3}{32}(\pi^2 + 12)\frac{1}{x}\right\}, \tag{34b}$$

$$\left(x = \frac{W'}{Z^2}\right).$$

1) A. a. O. [Anm. 3) S. 570].

2) Vgl. die genaueren Rechnungen von Y. Nishina, S. Tomonaga u. H. Tamaki, a. a. O.

Der Gültigkeitsbereich der Formeln (34), (34a) und (34b) ist durch die Bedingungen

$$\beta \ll 1, \qquad \alpha Z \ll 1 \tag{35}$$

begrenzt, wobei die zweite der Bedingungen (35) zum Ausdruck bringt, daß auch die mittlere Geschwindigkeit der an das Atom gebundenen Elektronen klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein soll.

Wie man sieht, stimmen die Ausdrücke (33) und (34) der Form nach genau überein, insbesondere tritt die für die Größenordnung von σ maßgebende Potenz von α beidemal in demselben, nämlich 9. Grade auf. Nur der Verlauf der Funktionen $F_S(x)$ und der (33) entsprechenden summarischen Funktion $x^{3/2}$, welche die Abhängigkeit von σ von der Energie W' des Positrons enthalten, scheinen auf den ersten Blick stark auseinanderzuweichen. Bedenkt man jedoch, daß wir uns bei der Abschätzung des Integrals (28′) mit einer sehr rohen Annäherung begnügt haben, so wird man nicht mehr erwarten dürfen, als daß (33) und (34) in dem Gültigkeitsbereich dieser Ausdrücke der Größenordnung nach übereinstimmen. Dieser Bereich ist nach oben durch die Einschränkung $\beta \ll 1$, nach unten dadurch begrenzt, daß die obige rohe Abschätzung nur insoweit die richtige Größenordnung geben kann, als die Energie W' hinreicht, damit das Positron genügend tief in den durch den Radius a_F gekennzeichneten inneren Bereich des Atoms eindringen kann. Eine nähere Überlegung zeigt, daß hiermit $x = \frac{W'}{Z^2}$ den Einschränkungen

$$Z^{-\frac{2}{3}} \ll x \ll (\alpha Z)^{-2} \tag{36}$$

unterworfen wird. Der normalerweise für x in Frage kommende Bereich wird also etwa zwischen $x = 1$ und $x = 100$ liegen. Wie man leicht nachrechnet, wird in diesem Gebiet hinreichend gute Übereinstimmung zwischen (33) und (34) erzielt, wenn C in (33) etwa den Wert $^1/_5$—$^1/_{20}$ besitzt. Ein solcher Wert ist aber mit unseren Abschätzungen jedenfalls wohl vereinbar und ist übrigens für die Größenordnung von σ belanglos (α^9 von der Größenordnung 10^{-19}!).

Wir kommen somit zu dem Ergebnis, daß unsere korrespondenzmäßige Betrachtung die Größenordnung der Wahrscheinlichkeit der Wiedervereinigung von Elektron—Positron-Paaren in Übereinstimmung mit den Rechnungen auf Grund der Diracschen Theorie richtig wiedergibt. —

Die vorliegende Untersuchung hat engere Berührungspunkte mit zwei inhaltlich und zeitlich weit auseinander liegenden speziellen Arbeitsgebieten von Sommerfeld: einmal mit der Theorie des Kreisels, sodann mit demjenigen Fragenkomplex, welcher durch die Existenz der die universellen Naturkonstanten e, $\hbar$, c zu einer reinen Zahl verknüpfenden „Feinstrukturkonstanten" beherrscht wird Es ist dem Verf. daher eine besondere Freude, diese Überlegungen in einem Arnold Sommerfeld gewidmeten Hefte der „Annalen" veröffentlichen zu dürfen.

Herrn Dr. A. Papapetrou möchte ich für viele wertvolle Diskussionen herzlich danken.

Stuttgart, Hoferstr. 5, im September 1938.

(Eingegangen 30. September 1938)